

Rappel sur la dérivée

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$
tel que f est définie sur un voisinage
de x_0 .

On considère la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{array}{l} \text{donne la} \\ \text{pente de la} \\ \text{tangente en } x_0 \end{array}$$

Il y a deux possibilités:

- Cette limite existe (elle vaut alors un nombre $L \in \mathbb{R}$)
- Cette limite n'existe pas

Dans le 1^{er} cas on dit que
 f est dérivable en x_0 et que
la dérivée de f en x_0 vaut L .
On écrit $f'(x_0) = L$

Pour faire le lien avec la tangente,
on rappelle que l'équation de la
tangente en x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

↑ la pente

Def Soit I un intervalle ouvert
On dit que f est dérivable sur I
si: f est dérivable en $x_0 \forall x_0 \in I$.

On peut alors considérer la fonction

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

On appelle $f'(x)$ la fonction dérivée

Exemple $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

Dérivée des fonctions trigonométriques

Preliminaire

Prop Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$
dérivable sur D_f

(1) f périodique $\Rightarrow f'$ aussi périodique
(avec la même période)

(2) f paire $\Rightarrow f'$ impaire
 $f(-x) = f(x)$

(3) f impaire $\Rightarrow f'$ paire
 $f(-x) = -f(x)$

Dérivée de cos, sin et tan

Prop $\sin'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Preuve Il faut montrer que
 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \sin'(x_0) = \cos(x_0)$

$$\begin{aligned}\sin'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$\downarrow$$
$$\cos(x_0)$$

$$= \cos(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$$

IPE ✓
1 ✓

On peut étendre ce résultat:

Exemple Trouvons la fonction dérivée de $\sin^2(x)$: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(\sin^2)'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sin(x) + \sin(x_0))(\sin(x) - \sin(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) + \sin(x_0) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$\downarrow$ $2 \sin(x_0)$ $\downarrow$ $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$

$$= 2 \sin(x_0) \cos(x_0)$$

$$\text{Prop } \cos'(x) = -\sin(x)$$

Preuve En exercice dans la série 10.

$$\text{Prop } \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Preuve Soit $x_0 \in \mathcal{D}_{\tan}$. On a

$$\tan'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan(x) - \tan(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan(x - x_0)(1 + \tan(x)\tan(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan(x - x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \tan(x)\tan(x_0))$$

$\downarrow$ $\neq \text{PE}$ $\downarrow$ $1 + \tan^2(x_0)$

$$= \underline{1 + \tan^2(x_0)}$$

$$\text{Or } 1 + \tan(x_0)^2 \\ = 1 + \left(\frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} \right)^2$$

$$= 1 + \frac{\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = 1 + \frac{1 - \cos^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} \\ = \frac{1}{\cos^2(x_0)} + 1 - 1 = \frac{1}{\cos^2(x_0)}$$

$$\text{Prop } \cot'(x) = -1 - \cot^2(x) \\ = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

Preuve exercice, Série 10.

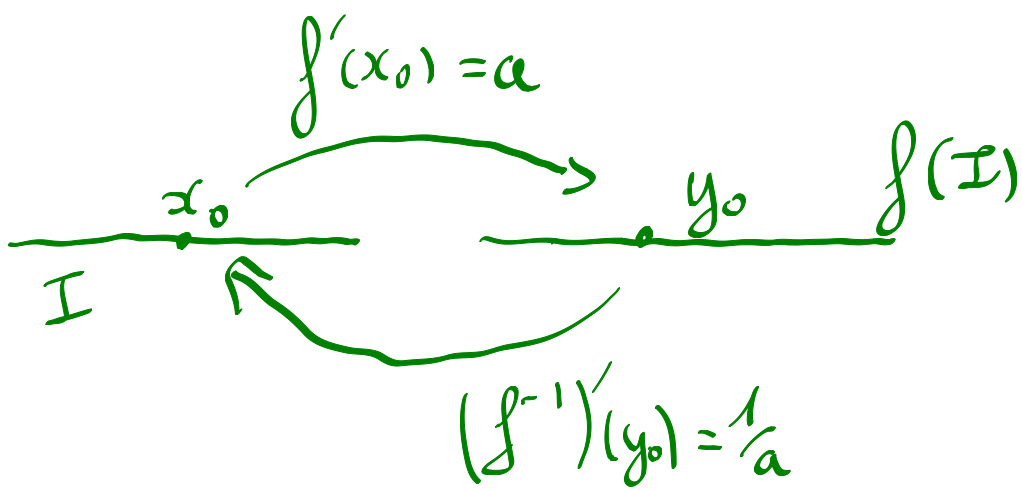
Dérivée des fonctions trigonométriques réci-pro-que

Prop Soit I un intervalle ouvert,
et soit $f: I \rightarrow f(I)$ tel que

- f est bijective sur I
- f est dérivable sur I
- $f'(x_0) \neq 0 \quad \forall x_0 \in I$

Alors $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est dérivable et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$



Preuve

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

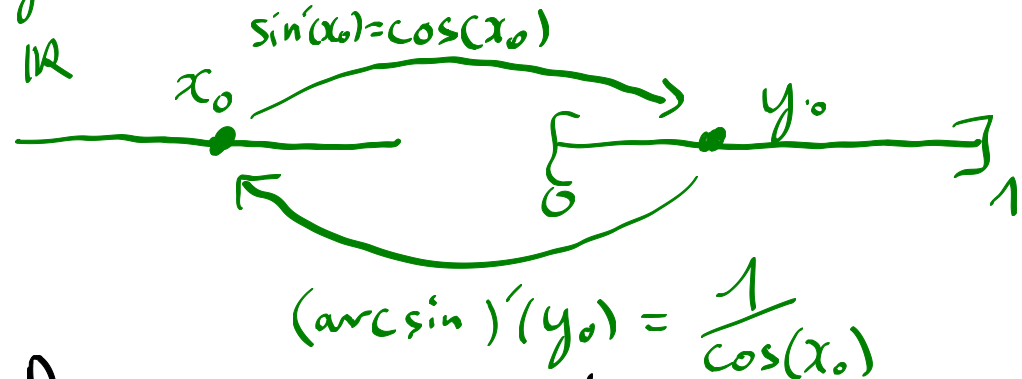
On substitue
 $x = f^{-1}(y); x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \end{aligned}$$

Corollaire

- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1; 1[$
- $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1; 1[$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Preuve On montre que pour $\arcsin$:
 $f(x) = \sin(x)$



Donc $\arcsin'(y_0) = \frac{1}{\cos(x_0)}$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Ceci nous donne un nouveau IPE:

Prop $\arctan(x) \sim x$

Preuve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$$

$$= \arctan'(0) = \frac{1}{1-0} = 1$$